担保债券违约相关系数求解模式及增信有效性

安融信用评级有限公司

[**摘要**] 目前，有担保债券的担保主体呈现多样化。在求解有担保债券联合违约概率，确定债券级别的过程中，有担保债券发行人和担保人违约相关系数的求解成为有担保债券信用评级的一大难题。本文给出了有担保债券违约相关系数的求解模式，并探讨担保是否能有效提高企业债券的信用等级。

[**关键词**] 有担保债券 违约相关系数 违约概率

Abstract: The cautioner of the guaranteed bond has become diversified since the file on how to effectively preventing the corporate bonds’ guarantee risk was issued. In order to determine the bond’s rating level, we need to know the joint default probabity of the guaranteed bond, so how to calculate the default correlation of the bonds’ issuer and the cautioner is critical. This essey first analyses how to solve the problem of the guaranteed bond’s default correlation, and then we discuss whether providing guarantee has effectively heighten the bond’s ratng level .

Key Words: Guaranteed Bond Default Correlation Joint

Default Probability

一、问题的提出

在银监会叫停银行为以项目债为主的企业债券提供担保，对其他用途的企业债券原则上不再出具银行担保之前，国内发行的企业债券大多由银行特别是政策性银行和国有商业银行进行担保。在《关于有效防范企业债担保风险的意见》出台后，银行原则上不能再为企业债券提供担保，企业债券改由非银行第三方提供担保。

这样，有担保债券的担保主体呈现多样化，担保方和被担保方由原先单纯的银企关系，转为企业与银行、企业与企业之间的关系。担保主体多样化给我们对有担保债券的评级带来了新的问题：银行为企业提供担保时，银行的信用等级往往要高出企业的信用等级许多，那么有担保债券的发行人和担保人（银行）的违约相关系数对该有担保债券违约概率高低影响并不是特别明显；企业为企业提供担保时，担保企业的信用等级可能高于被担保企业，可能与担保企业信用等级相同，甚至可能低于被担保企业的信用等级，此时违约相关系数成为影响该有担保债券违约概率的重要因素。

因此我们有必要知道如何得出有担保债券发行人和担保人的违约相关系数。国内研究有担保债券发行人和担保人违约相关系数的文献并不多，本文的一个重要内容是为分析发行人和担保人违约相关系数提供一个理论框架。本文的写作思路是：首先分析有担保债券违约概率的求解方法，然后给出有担保债券发行人和的违约相关系数的求解模式，最后探讨担保是否能提高企业债券的信用等级。

二、有担保债券违约概率的求解方法

假设有担保债券发行人为 A，有担保债券担保人为 B，D_A和D_B表示债券发行人 A 和债券担保人 B 违约的可能性。我们知道D_A和D_B这两个随机变量均只取两个值，要么履约要么违约，它们均是服从二项分布的随机变量，其取值为：

$$D_i = \begin{cases} 1，发行人或担保人违约 \\ 0，发行人或担保人履约 \end{cases} \qquad i = A或B$$

那么有担保债券发行人 A 和有担保债券担保人 B 的违约概率分别为$P(D_A = 1)$和$P(D_B = 1)$。按照有担保债券的法律定义，只有在两家企业同时违约，即发行人（发债企业）不履行债务，担保人（担保企业）又无法承担该债务时，该有担保债券才会发生违约，其联合违约概率为$P(D_A = 1，D_B = 1)$。

根据概率论中 Pearson 相关系数的概念，有担保债券发行人和担保人的违约相关性ρ_D可定义为:

$$\begin{aligned}\rho_D &= \frac{Cov(A,B)}{\sqrt{Var(A)\cdot Var(B)}} \\ &= \frac{P_{AB} - P_A\cdot P_B}{\sqrt{P_A(1-P_A)P_B(1-P_B)}} \\ &= \frac{P(D_A=1, D_B=1) - P(D_A=1)\cdot P(D_B=1)}{\sqrt{P(D_A=1)\cdot[1-P(D_A=1)]\cdot P(D_B=1)\cdot[1-P(D_B=1)]}}\end{aligned}$$

将上式进行等式转化，可得：

$$\begin{aligned}P(D_A=1, D_B=1) &= P(D_A=1)\cdot P(D_B=1) + \\ &\rho_{AB}\cdot\sqrt{P(D_A=1)\cdot[1-P(D_A=1)]\cdot P(D_B=1)\cdot[1-P(D_B=1)]}\end{aligned}$$

（1）

由式（1）可知，只要知道有担保债券发行人和担保人各自的违

约概率以及二者之间的违约相关系数，我们就可以求出有担保债券的违约概率。

有担保债券发行人和担保人各自违约概率的分析方法与一般的无担保债券违约率分析方法基本一致，这里我们不对其进行分析，鉴于违约相关系数的重要性，下面我们重点分析违约相关系数的求解模式。

三、有担保债券违约相关系数的求解模式

违约相关性是指不同企业之间违约的相互关系，即一个企业违约引起另一个企业违约的可能性。关于违约相关性的一个简单例子是两个具有债权债务关系的企业：如果债务人对债权人发生违约，有理由认为该债权人无法支付自身债务的可能性将加大。这是一个违约正相关的例子，一家公司发生违约，那么另一家与之有关联的公司违约发生违约的可能性会增大。

当然也存在企业违约负相关的情形，最直观的例子是处于相互竞争关系的两家公司：假如甲公司和乙公司是同一行业的两个竞争者，甲公司因为经营状况恶化发生违约而导致破产，退出该行业 。作为竞争者的乙公司可能会从甲公司破产中获得好处：乙公司将获得甲公司的客户，并能够从甲公司原来的供应商中得到供应价格下调的好处。在这种情况下，乙公司有了更多的客户来源和更多的供应商可供选择，其净利润会增加，发生违约的可能性将下降，此时企业违约相关呈负向关系。

一般情况下，受整体经济状况、行业景气度和企业间资产、利润

关联性的影响，公司违约一般呈正相关关系。有担保债券的发行人和担保人是两家企业，担保人之所以肯为发行人提供担保，担保人和发行人之间肯定在宏观经济条件、行业背景和企业运营等方面或多或少存在正相关关系，它们的相关程度影响着有担保债券的违约概率，进而决定了有担保债券的信用等级。

1. 有担保债券发行人和担保人违约相关性的取值范围

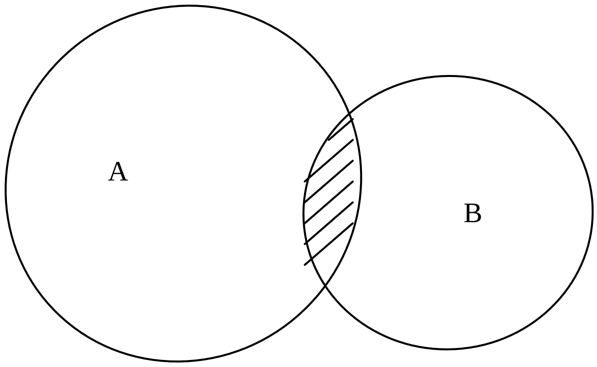


图 1

我们用图 1 来说明有担保债券发行人和担保人联合违约概率的问题。在图 1 中，圆圈 A 表示有担保债券的发行人 A 发生违约的概率 $P(D_A=1)$；圆圈 B 表示有担保债券的担保人 B 发生违约的概率 $P(D_B=1)$；圆圈 A 和 B 相交的阴影部分表示有担保债券的发行人 A 和担保人 B 联合违约的概率，即有担保债券发生违约的概率 $P(D_A=1,\ D_B=1)$。

如果有担保债券发行人和担保人完全独立，也就是说发行人和担保人的违约完全互不相关，例如某家欧洲银行给毫无业务关系的中国某工业企业提供担保，二者既没有受到相同的宏观经济因素的制约，也没有行业之间的相关性，我们可以认为二者的经济运行状况对另一

方违约的可能性基本不相关。在这种情况下，$P(D_B=1|D_A=1)=P(D_B)$，此时债券违约的概率最小，为$P(D_A=1)\cdot P(D_B=1)$①。

一般情况下，当一家公司发生违约时，另一家公司发生违约的可能性会增大——或者是因为这两家企业所处的宏观经济环境相同；或者是因为这两家企业同在一个地区；或者是因为这两家企业具备同一行业背景；或者是因为这两家企业是关联企业——也就是说，公司间的违约正相关性是存在的。刚才的分析已说明，在有担保债券的情形中，债券担保人之所以会为该债券提供担保，担保人和发行人肯定在业务上、利润分配上等存在一定的关系，因此也存在一定的违约正相关性。

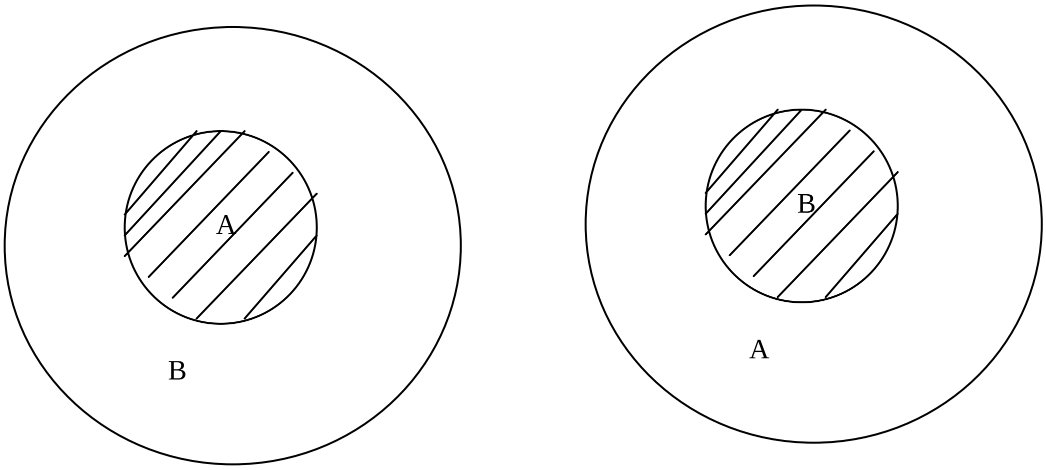
另一个关于违约相关性的极端例子是两家公司的违约相关性很强②，以至二者的违约概率是一种包含与被包含的关系，即$P(D_A=1)\subset P(D_B=1)$或$P(D_A=1)\supset P(D_B=1)$，我们用图 2 来表示。

---

① 根据条件概率公式，

$P(D_A=1,D_B=1)=P(D_B=1|D_A=1)\cdot P(D_A=1)=P(D_A=1)\cdot P(D_B=1)$。

② 我们可以利用公式$\rho_{XY}=(P_{XY}-P_X\cdot P_Y)\Big/\sqrt{P_X(1-P_X)P_Y(1-P_Y)}$求得违约相关系数，应注意的是，当$P_X\neq P_Y$时，$\rho_{XY}$的最大值小于 1。国内许多文献错误的认为，违约相关系数的取值区间一定为[0，1]。



（a）　　　　　　　　　　　　　　　（b）

图 2

在图 2（a）中，有担保债券发行人 A 对担保人 B 有完全的影响力，也即如果债券发行人 A 违约，那么担保人 B 一定违约，即 $P(D_B=1|D_A=1)=1$，因此 $P(D_A=1,D_B=1)=P(D_A=1)$。在图 2（b）中，担保人 B 在有担保债券发行人 A 发生违约的情况下才发生违约，此时 $P(D_A=1,D_B=1)=P(D_B=1|D_A=1)\cdot P(D_A=1)=P(D_B=1)$。这两种情形是有担保债券发行人和担保人违约正相关的极端情形，此时该有担保债券违约概率最大，违约概率为 $P(D_A=1,D_B=1)=\min\{P(D_A=1),P(D_B=1)\}$。由此可知，有担保债券违约的可能性肯定低于发行人和担保人两者中的任何一个，而信用评级与违约概率呈负向关系，因此有担保债券的评级应不低于担保人和发行人两者中最高的评级。

从以上分析可得出，有担保债券违约概率的取值介于 $P(D_A=1)\cdot P(D_B=1)$ 和 $\min\{P(D_A=1),P(D_B=1)\}$ 之间，有担保债券的违约概率不仅和发行人(发债企业)和担保人(担保公司)的违约概率有关，而

且和发行人和担保人的违约相关系数有关。

2.基于 KMV 模型的有担保企业债券违约概率计算方法的理论构架

违约相关系数的求解是有担保债券信用评级的主要障碍，因为违约相关性不能被直接估计。国外处理违约相关性主要有两种方法。一种是把违约相关看成是外在输入，Moody 公司的 KMV Protfolio Manager 与 RiskMetrics 集团的 Credit Manager 这两个理论模型都预先假定一个外部的相关输入；另一种是把违约相关看成是内部因素，Macro Factor 模型和 Credit Suisse First Boston’s Credit Risk+就是采用这种方法。

表 1 处理违约相关性的方法

作为外在输入的相关性	作为内在因素的相关性
资产价值相关（KMV 方法） 股票价值相关（RMG 方法）	因素模型 精算模型（如 *Credit Risk*$^{+}$）

在本文的研究中，我们采用比较直观的资产价值相关方法。处理违约相关性的主要思路是通过资产价值的相关性求出两家企业的联合违约概率，然后利用概率论的 Pearson 线性相关系数求出两家企业的违约相关系数。其求解过程如下：

步骤 1：估计资产价值 A 及资产价值波动性 σ_A

套用 Black-Scholes 和 Merton 的期权定价理论(Option Pricing Theory)，我们将公司举债经营的决定看作是股东向债权人买入多头看涨期权，标的物为公司的资产价值，期权的到期日为该负债的到期

日，执行价格为负债的到期值。根据“股权等同于公司资产价值期权”的观点，可以得到：

$$E = A \cdot N(d_1) - DPT \cdot e^{-r(T-t)} N(d_2)$$

（3）

其中，$d_1 = \dfrac{\ln(\dfrac{A}{DPT}) + (r_c + \dfrac{\sigma_A{}^2}{2})(T-t)}{\sigma_A \sqrt{T-t}} = \dfrac{\ln[\dfrac{A}{DPT \cdot e^{-r(T-t)}}]}{\sigma_A \sqrt{T-t}} + \dfrac{\sigma_A \sqrt{T-t}}{2}$

$$d_2 = d_1 - \sigma_A \sqrt{T-t}$$

其中，E为股票价值，A为资产价值，DPT为公司违约点，等于公司的流动负债和一半长期负债之和，r_c为无风险利率，σ_A为资产价值的波动性，σ_E为股票价值的波动性，t 为当前时间，T 为计算违约概率的时间期（如 T＝1 年）。式（3）中只有资产价值A及资产价值波动性σ_A是未知数。

基于股票的 Ito Lemma 原理，权益价值波动和资产价值波动存在如式（4）的关系：杠杆程度越高的公司，股东的权益价值越有风险。

$$\sigma_E = \frac{A}{E} \cdot \Delta \cdot \sigma_A$$

（4）

其中Δ为避险比率，等于$N(d_1)$。因此式（4）可化为：

$$\sigma_E = \frac{A}{E} \cdot N(d_1) \cdot \sigma_A$$

（5）

利用式（3）和式（5），我们可以求出资产价值A及资产价值波动性σ_A。

步骤 2：求出有担保债券发行人和担保人的资产相关性ρ_A

由于企业资产价值相关性体现在企业资产回报上，因此可利用企业资产回报率的相关性来分析企业资产相关性。

我们用一个包含宏观层面与微观层面的滞后风险因子和当期系统随机效应因子的线性面板数据模型来说明和解释回归方程的因变量资产价值收益率。该模型的回归方程表示如下：

$$r_{it} = \beta_0 + \beta_1 X_{it-1} + \gamma Z_{it-1} + bf_t + \varpi u_{it}$$

（6）

X_{it-1}代表时间滞后的特定风险因素向量，比如以往财务报告中的净资产收益率、两年前公司的职工人数等；Z_{it-1}代表时间滞后的系统风险因素向量，比如以往年度 GDP 增长率、失业率、货币市场利率等；f_i代表为包含在该模型中的当期系统因素，在我们的研究中，假设f_i服从标准正态分布。

令u_{it}服从 logistic 分布，那么u_{it}的方差σ_u^2将等于$\pi^2/3$。资产相关系数表示如下：

$$\begin{aligned}
\rho_A &= \rho(r_{it}, r_{jt}) \\
&= \frac{Cov(bf_t + \varpi u_{it}, bf_t + \varpi u_{jt})}{\sqrt{Var(r_{it})} \cdot \sqrt{Var(r_{jt})}} \\
&= \frac{E[(bf_t + \varpi u_{it})(bf_t + \varpi u_{jt})]}{\sqrt{b^2 + \varpi^2 Var(u_{it})} \cdot \sqrt{b^2 + \varpi^2 Var(u_{jt})}} \\
&= \frac{b^2 E(f_t \cdot f_t)}{b^2 + \varpi^2 \cdot \sigma_u^2} \\
&= \frac{b^2 Var(f_t)}{b^2 + \varpi^2 \cdot \sigma_u^2} \\
&= \frac{b^2}{b^2 + \varpi^2 \cdot \pi^2/3}
\end{aligned}$$

只要能够从回归方程中估计出b和ϖ，我们就能求出资产相关性。

步骤 3：求出 $F(A_1,A_2,\rho_A)$ 函数，进而求出两家公司的联合违约概率

标准的资产相关性模型通常假定资产价值服从多元正态分布，因此有担保债券发行人和担保人的资产 A_1、A_2 服从二元正态分布。我们用函数 $F(A_1,A_2,\rho_A)$ 表示标准正态二元密度函数，该函数形式见式（7）。

将步骤 1 和步骤 2 所求得的资产价值 A_1、A_2，资产价值波动性 σ_{A1}、σ_{A2}，以及两家公司的资产相关性 ρ_A 的值代入式（7），从而求出 F 函数。

$$F(A_1,A_2,\rho_A)=\frac{1}{2\pi\sigma_{A_1}\sigma_{A_2}\sqrt{1-\rho_A^2}}\cdot\exp\left\{-\frac{1}{2(1-\rho_A^2)}\left[\left(\frac{A_1}{\sigma_{A1}}\right)^2-2\rho_A\left(\frac{A_1A_2}{\sigma_{A1}\sigma_{A2}}\right)+\left(\frac{A_2}{\sigma_{A2}}\right)^2\right]\right\}$$

（7）

进而我们利用式（8），求得两家企业的联合违约概率 $P(D_A=1,D_B=1)$。

$$P(D_A=1,D_B=1)=\int_{-\infty}^{D_1}\int_{-\infty}^{D_2}F(A_1,A_2,\rho_A)dA_1dA_2$$

(8)

步骤 4：从 $P(D_A=1,D_B=1)$ 求出两家公司的违约相关系数

在得知两家企业各自的违约概率和联合违约概率后，通过式(9)，我们可以得出两家公司的违约相关系数。

$$\rho_D=\frac{P(D_A=1,D_B=1)-P(D_A=1)\cdot P(D_B=1)}{\sqrt{P(D_A=1)\cdot[1-P(D_A=1)]\cdot P(D_B=1)\cdot[1-P(D_B=1)]}}$$

（9）

四、担保对债券信用等级的提高程度分析

有担保债券的违约相关性无法直接求出，实际上以上的分析是从资产相关性入手，求得有担保债券发行人和担保人的联合违约概率，进而才得出有担保债券的违约相关性。但这并不意味着有担保债券当事人间的违约相关性不会对该有担保债券的违约概率产生影响，事实上，违约相关性因素与有担保债券发行人和担保人的违约概率因素一样，都是影响有担保债券的违约概率的关键因素。

我们以数据为支持，分析担保对债券信用等级的提高程度。以下数据为模拟数据，并不是真实的信用评级产生的数据，但这些模拟数据遵从了违约概率和违约相关系数的区间范围的限定，因此能有效地说明有担保债券发行人与担保人违约概率、违约相关系数与有担保债券违约概率的关系。

表 2 说明了五年期债务信用等级与违约概率临界值的关系，如果某家公司的五年期债券违约概率为 0.32，那么该债项评级为 AA。

表 2　五年期债务的信用等级与违约概率关系（单位：%）

AAA	0.20
AA	0.40
A	0.70
BBB	2.50
BB	10.00
B	25.00

出于计算简便的考虑，我们假定五年期企业债务的违约概率恰好等于信用等级违约概率的临界值。比如说，AAA 级企业的违约概率为 0.20。根据公式 $\rho_{AB}=\dfrac{P(D_A=1,D_B=1)-P(D_A=1)\cdot P(D_B=1)}{\sqrt{P(D_A=1)\cdot[1-P(D_A=1)]\cdot P(D_B=1)\cdot[1-P(D_B=1)]}}$ 和有

担保债券违约概率取值范围，我们可以求出任意两个信用等级间公司违约相关系数的最大值，计算结果如表 3 所示。

表 3 五年期债务企业的最大相关系数

	AAA	AA	A	BBB	BB	B
AAA	1					
AA	0.71	1				
A	0.53	0.75	1			
BBB	0.28	0.40	0.52	1		
BB	0.13	0.19	0.25	0.48	1	
B	0.08	0.11	0.15	0.28	0.58	1

注：只要被担保企业和担保企业的违约概率不相等，那么二者的最大正相关系数将会小于 1。

在有担保债券发行人和担保人违约相关系数小于最大相关系数的前提下，我们假设以下违约相关系数值，如表 4（a）所定示。从表 4（a）可知，在有担保债券发行人和担保人的信用评级各自为 BBB 和 AA 的情况下，两者的违约相关系数为 0.15。

表 4（a） 五年期债务的公司违约相关系数

	AAA	AA	A	BBB	BB	B
AAA	0.4					
AA	0.25	0.4				
A	0.20	0.25	0.4			
BBB	0.10	0.15	0.16	0.4		
BB	0.03	0.05	0.06	0.15	0.4	
B	0.01	0.02	0.04	0.10	0.18	0.4

利用表 2 和表 4（a），我们可以求出在有担保债券发行人和担保人各种信用等级和违约相关系数下，五年期有担保债券的违约概率，计算结果见表 4（b）。对照表 2 和表 4（b），我们可以得出有担保债券发行人和担保人在各种信用等级下有担保债券的信用等级，评级结果见表 4（c）。

表 4（b） 五年期有担保债券的违约概率（%）

	AAA	AA	A	BBB	BB	B
AAA	0.0806					
AA	0.0713	0.1622				
A	0.0759	0.1344	0.2955			
BBB	0.0748	0.1578	0.2258	1.225		
BB	0.0602	0.1347	0.2201	0.9526	6.1	
B	0.0693	0.1547	0.3194	1.3010	4.84	13.75

表 4（c）五年期有担保债券信用等级

	AAA	AA	A	BBB	BB	B
AAA	AAA					
Aa	AAA	AAA				
A	AAA	AAA	AA			
BBB	AAA	AAA	AA	BBB		
BB	AAA	AAA	AA	BBB	BB	
B	AAA	AAA	AA	BBB	BB	B

如果有担保债券发行人和担保人的违约概率大致相同，发行人和担保人的信用等级相同，那么 $P(D_A = 1) \approx P(D_B = 1)$，$P(D_A = 1, D_B = 1) = P^2(D_A = 1) + \rho_D \cdot P(D_A = 1) \cdot [1 - P(D_A = 1)]$。此时通过担保能

否能够降低该债券的违约概率，进而提高该有担保债券的信用等级，这取决于有担保债券违约相关系数的大小。如果 $\rho_D = 1$，$P(D_A = 1, D_B = 1) = P(D_A = 1)$，通过担保无法降低债券的违约概率。此时担保对降低债券违约概率，进而提高债券信用等级没有任何作用；如果 $\rho_D = 0$，$P(D_A = 1, D_B = 1) = P^2(D_A = 1)$，这将大大降低有担保债券的违约概率，从而提高债券的信用等级。可以看出，在有担保债券发行人和担保人的信用等级相同的情况下，违约相关性对能否提高债券信用等级起到了决定性作用。从表 4（b）和表 4（c）可以看出，在 ρ_D p 1 的条件下，通过接受相同信用等级企业的担保能够降低有担保债券违约概率，并可能提高债券的信用等级。如表 4（c）所示，通过接受相同信用等级企业的担保，AA 级别的企业其有担保债券的信用等级提高至 AAA。

如果有担保债券发行人的违约概率大于担保人的违约概率，发行人的信用等级低于担保人的信用等级，该有担保债券的信用等级至少提高至发行人的信用等级层次上，在这种情形下，通过担保能很直观的提高该债券的信用等级，银行为企业债券提供担保就属于这种情形。

如果有担保债券发行人的违约概率小于担保人的违约概率，发行人的信用等级高于担保人的信用等级，此时担保对提高债券信用等级的程度不如前面两种情况来得明显。其实在这种情形下，只要违约相关系数不是最大值，通过提供担保还是能够降低该有担保债券的违约概率，也有提高该有担保债券信用等级的可能性。在表 4（c）中，

一个 A 信用等级的企业为一个 BB 信用等级的企业提供债券担保，该有担保债券的信用等级提高到 AA。

五、结论与本文的不足之处

通过以上的分析，我们可以得出：担保对债券信用等级提高的程度取决于有担保债券发行人和担保人各自信用等级的差别程度和两者的违约相关系数。当债券担保人的信用等级高于发行人的信用等级时，该有担保债券的信用级别至少能够提高至债券担保人的信用级别，至于是提高到债券担保人的级别还是其级别以上，这取决于发行人和担保人的违约相关系数；当债券发行人的信用级别高于或者等于担保人的信用级别时，在违约相关系数的作用下，有担保债券的级别也有提高的可能性。

因此，在对有担保债券进行信用评级时，如何准确地得出有担保债券发行人和担保人的违约相关系数至关重要，它关系到我们是否能够对该有担保债券进行准确的评级分析。国内资信评级机构在对有担保债券信用评级时，主要考虑担保人和发行人各自的信用等级，以及担保企业的整体经济运行状况，碍于求得违约相关性分析的难度较大，大多未对它进行深入分析。上文给出了求解违约相关系数的理论框架，为如何分析违约相关系数提供了思路。当然，该理论框架也存在着一定的缺陷：框架不够具体，还不能完全适合中国有担保债券的具体情形，模型的建立仅仅是给债券评级基本的数据支持，在现实的债券信用评级过程中仍需要考虑连环担保、担保对违约后回收率的影响等因素。